22.04.2002

Übungen zur Theoretischen Mechanik

Sommersemester 2002

Blatt 1

Übungsaufgaben:

1. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ kann mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols ϵ_{ijk} in folgender Form geschrieben werden (Summenkonvention!):

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j\, b_k$$

dabei bezeichnet ϵ_{ijk} den total antisymmetrischen Tensor $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}$ mit $\epsilon_{123} = +1$. Die Determinanten einer 3×3-Matrix A hat somit die Form $\det(A) = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$. Eine weitere nützliche Relation ist $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol darstellt. Zeigen Sie:

a) $$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \det\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$$

b) $$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

c) $$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$$

3 Punkte

2. Ein Massenpunkt bewege sich auf einer Schraubenbahn (Radius R, Ganghöhe h). Der Betrag der Bahngeschwindigkeit habe den konstanten Wert v. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung (Vektoren) des Massenpunktes in Abhängigkeit von der Zeit t und den Parameters R, h und v in kartesischen und Zylinder-Koordinaten sowie den Krümmungsradius der Bahn. Der Anfangspunkt der Bahn sei $\mathbf{r}(0) = (R, 0, 0)$ in kartesischen Koordinaten. **4 Punkte**

3. Ein Mann will einen Fluß der Breite d überqueren und den ihm genau gegenüberliegenden Punkt in möglichst kurzer Zeit erreichen. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses sei v_0; der Mann kann mit der Geschwindigkeit v_S schwimmen und mit der Geschwindigkeit v_L laufen. Er beginnt zu schwimmen, wird abgetrieben und läuft am anderen Ufer zum Zielpunkt zurück.

a) Welchen Winkel φ muß die Richtung seiner Schwimmgeschwindigkeit (in bezug auf das Wasser) mit der Fließrichtung einschließen, damit die benötigte Gesamtzeit minimal wird?

b) Wie groß ist diese Zeit?

5 Punkte

Abgabetermin: Montag, 29.04.02, 10:00 Uhr, Fach: Günther

`http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kley/lehre/tm/index.html`