23.06.2002

Übungen zur Theoretischen Mechanik

Sommersemester 2002

Blatt 10

Thema: Starrer Körper und Lagrange II

Übungsaufgaben:

27. Betrachten Sie die Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels für den Fall, dass die Rotationsachse senkrecht ($z_{IS}-$ und z-Achse stimmen überein) steht.

a) Zeigen Sie, dass die Bewegung stabil oder instabil ist, je nach der Größe der Rotationsgeschwindigkeit, und Berechnung sie das kritische ω_3.

b) Skizzieren Sie das zugehörige effektive Potential U_{eff}, und untersuchen das Stabilitätsverhalten anhand dessen graphischer Eigenschaften.

c) Falls der Kreisel in der stabilen Konfiguration gestartet wird, was ist der Effekt der Reibung, wenn diese ω_3 langsam reduziert?

4 Punkte

28. Rollender Zylinder:

In einem Hohlzylinder mit Innenradius R rolle unter der Wirkung der Schwerkraft ein zweiter Hohlzylinder mit Außenradius r und Innenradius $r/2$.

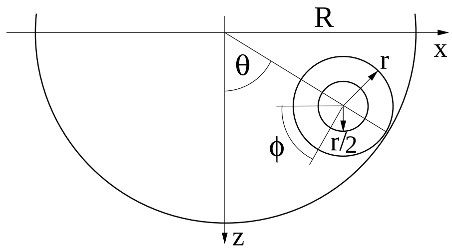

Abb: 1 Ein Zylinder im Zylinder

a) Berechne das Trägheitsmoment des rollenden hohlen Zylinders bezüglich der zur Zeichenebene senkrecht stehenden Achse durch dessen Schwerpunkt.

b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion für die Bewegung des inneren Zylinders unter Rollbedingungen, d.h. dass kein Gleiten auftritt.

c) Lösen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für kleine Winkel $\theta \ll 1$!

4 Punkte

29. Skifliegen im Sommer:
Der Schanzentisch einer Skiflugschanze (siehe Abb. 2) mit der Länge L sei wie ein viertel Zykloidenbogen mit dem Parameter a geformt,

$$
\begin{aligned}
x &= a(\phi - \sin\phi) + x_0, \quad x_0 = -a(\pi/2 - 1) \\
y &= a(1 + \cos\phi), \quad \pi/2 \le \phi \le \pi
\end{aligned}
$$

Ein als Massenpunkt der Masse m angenommener Skispringer startet von der Gesamthöhe H mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$. Nach Durchfahren der geneigten Ebene gelangt er (bei $x = 0$, d.h. $\phi = \pi/2$, der Übergang verlaufe stetig differenzierbar) auf den Schanzentisch und verläßt ihn (bei $y = 0$, $\phi = \pi$) in horizontaler Richtung. Seine anschließende (Flug-)Bahn ist durch die Schwerkraft der Erde bestimmt. Der ganze Prozeß verlaufe reibungsfrei.

a) Stelle die Bewegungsgleichungen des Springers für die 3 Teilstücke seiner Bahn (auf dem Schanzenstück nach Lagrange) auf und löse diese.
Hinweis: Beim Schanzentischstück empfiehlt sich in der Lagrangefunktion die Substitution $\zeta = \cos\frac{\phi}{2}$, was auf eine einfach zu lösende Bewegungsgleichung für ζ führt. Erst in deren Lösung zurücksubstituieren.

b) Bestimme die Verweildauer T des Springers auf dem Schanzentisch (Zykloidenstück).

c) Wie groß ist die horizontale Sprungweite vom Ende des Schanzentisches aus?

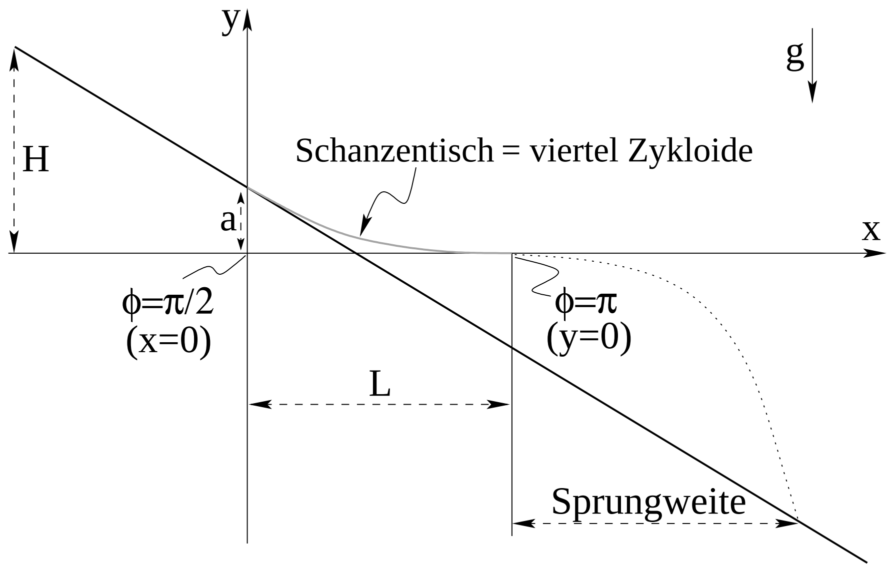

Abb: 2 Eine Skischanze

4 Punkte

Abgabetermin: **Montag, 1.07.02, 10:00 Uhr** Fach Günther