1.07.2002

Übungen zur Theoretischen Mechanik

Sommersemester 2002

Blatt 11

Thema: Hamiltonsche Mechanik

Übungsaufgaben:

30. Ein Massenpunkt (MP) bewege sich auf einer vorgeschriebenen Kreisbahn mit dem Radius R. Er sei durch eine Feder mit Federkonstante k einer exzentrisch wirkenden Federkraft ausgesetzt, wobei die Ausdehnung der entspannten Feder im Vergleich zu $R - a$ klein ist (siehe Abb. 1).

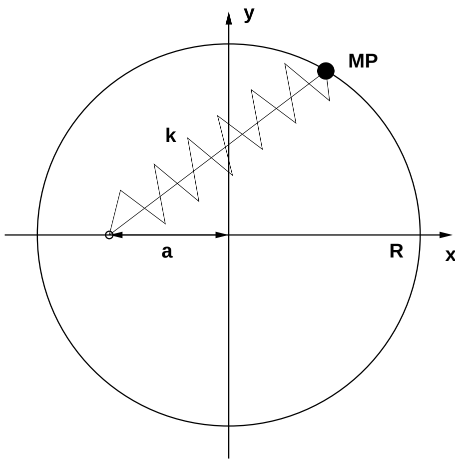

Abbildung 1: Ein mechanisches System mit Feder

a) Stellen Sie die Lagrange Gleichungen 2. Art für das System auf, und integrieren Sie die Bewegungsgleichung streng (bis auf ein Integral). Hinweis: Die Bewegungsgleichung besitzt ein Integral der Bewegung.

b) Stellen Sie die Hamilton-Funktion auf, und lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

4 Punkte

31. Poissonklammer:

a) Seien f und g beliebige Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, ..., q_f$, der zugehörigen kanonischen Impulse $p_1, ..., p_f$ und der Zeit t. Beweisen Sie das Poissonsche Theorem: Sind f und g Erhaltungsgrößen, so ist es auch die Poissonklammer $[f, g]$.

b) Berechnen Sie die Poissonklammer $[L_i, L_j]$ $(i, j = 1, 2, 3)$ für die kartesischen Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$ eines Teilchens!

Berechnen Sie die Poissonklammer $[f, L_i]$ für eine beliebige rotationsinvariante Observable (Funktion) f!

Zeigen Sie: Wenn zwei der drei Drehimpulskomponenten Erhaltungsgrößen sind, dann ist es auch die dritte.

c) Die Hamiltonfunktion eines Systems in einem homogenen, zeitunabhängigen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$ lautet

$$H = -g\,\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

wobei g ein konstanter Faktor und $\vec{\sigma}$ der Eigendrehimpuls (Spin) ist ($|\vec{\sigma}| = \text{const.}$, $\partial\vec{\sigma}/\partial t = 0$). Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\vec{\sigma}$ auf mit Hilfe der Poissonklammern für den Drehimpuls und lösen Sie diese.

4 Punkte

32. Kanonische Transformationen:

a) Sind die Transformationen

$$\begin{array}{lll} (I) & Q = \ln\left(\frac{1}{q}\,\sin(p)\right) & ; \quad P = q\,\cot(p) \\ (II) & Q = q^2 \cos\left(\frac{p}{2}\right) & ; \quad P = q^2\,\sin\left(\frac{p}{2}\right) \\ (III) & Q = \sqrt{q}\,\cos\,(2p) & ; \quad P = \sqrt{q}\,\sin\,(2p) \\ (VI) & Q = \arctan\left(\frac{q}{p}\right) & ; \quad P = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) \end{array}$$

kanonisch?

Hinweis: Zur Analyse können die Poissonklammern in den neuen Koordinaten herangezogen werden.

b) Ist

$$F = F_4(p, P) = \frac{P^2}{2}\cot\,(2p)$$

eine *erzeugende Funktion*?

4 Punkte

Abgabetermin: **Montag, 8.07.02, 10:00 Uhr** Fach Günther