Übungen zur Theoretischen Mechanik

Sommersemester 2002

Blatt 3

Thema: Eindimensionale Bewegung, Erhaltungssätze

Übungsaufgaben:

7. Ein als kugelförmig idealisierter Wassertropfen (mit konstanter Dichte ρ) falle reibungsfrei im homogenen Schwerefeld der Erde. Außerdem sei er von Wasserdampf umgeben, der auf seiner Oberfläche kondensiert. Die zeitliche Massenzunahme des Tropfens sei proportional zu seiner Oberfläche (Proportionalitätskonstante α).

Geben Sie den Radius r des Tropfens als Funktion der Zeit an, mit $r(t=0) = r_0$, und lösen Sie die Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $z(0) = h$ und $\dot{z}(0) = 0$, d.h. der Tropfen fällt aus der Höhe h nach unten.

Wie verhält sich die Geschwindigkeit, wenn der Tropfen sehr lange fällt?

4 Punkte

8. Ein Massenpunkt bewege sich in dem Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$$

wobei $\mathbf{a}$ ein konstanter Vektor in z-Richtung ist.

a) Stellen Sie die Energie- und Drehimpulsbilanz auf!

b) Diskutieren Sie die Existenz eines Potentials durch explizite Berechnung des Wegintegrals der Kraft für die in der Abbildung (1) rechts gegebenen Wege C_1 und C_2 in der $x-y$-Ebene!

c) Überprüfen Sie das Ergebnis aus b) durch Berechnung der Rotation ($\nabla \times \mathbf{F}$) des Kraftfeldes!

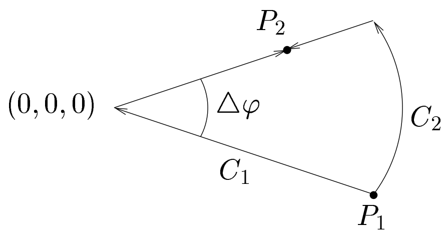

Abbildung 1: Wege in der x-y-Ebene für das Wegintegral der Kraft in Aufgabe 8.): Weg C_1 verläuft vom Punkt P_1 über den Koordinatenursprung zum Punkt P_2, während Weg C_2 zunächst einen Kreisbogen beschreibt und dann radial zum Punkt P_2 verläuft. Die Punkte P_1 und P_2 sollen die Abstände ρ_1 und ρ_2 vom Ursprung haben.

4 Punkte

9. Die Bewegungsgleichung eines Punktteilchens mit der Masse m und der elektrischen Ladung e in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = g\,\mathbf{r}/r^3$ ist gegeben durch die Lorentzkraftgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{eg}{c}\frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{r^3}$$

Wir definieren Drehimpuls und Spin als

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{S} = \frac{eg}{c}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

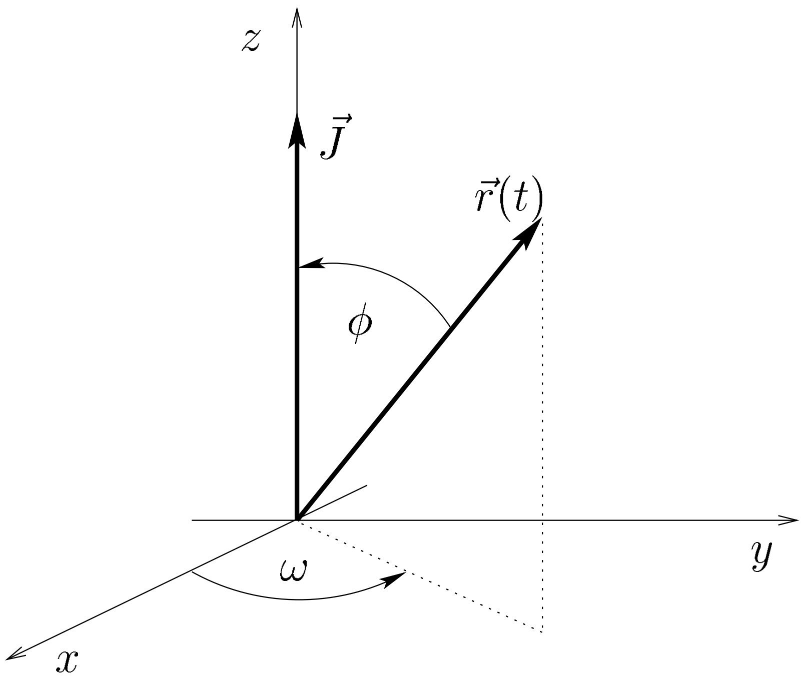

Abbildung 2: Gesamtdrehimpuls und Ortsvektor

a) Zeigen Sie, daß $\dot{\mathbf{r}}^2$ und $\mathbf{L}^2$ zeitlich konstant sind.

b) Man definiere nun den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Beweisen Sie, daß $\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{J}$ und $\mathbf{J}^2$ zeitlich konstant sind.

c) Bestimmen Sie den konstanten Winkel ϕ zwischen dem erhaltenen Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J}$ und der Bahn $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens, siehe Abb. (2). (Benutzen Sie die Ergebnisse aus b). Auf welcher geometrischen Fläche verläuft die Bahn $\mathbf{r}(t)$?

4 Punkte

Abgabetermin: Montag, 13.05.02, 10:00 Uhr, Fach: Günther