14.05.2002

Übungen zur Theoretischen Mechanik

Sommersemester 2002

Blatt 4

Thema: Zweikörperproblem, Zentralkraftfelder

Übungsaufgaben:

10. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Bahnkurve für allgemeine Kraftgesetze $F(r)$ geschrieben werden kann als

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s = -\frac{\mu r^2}{L_z^2} F(r) \tag{1}$$

wobei s der inverse Abstand $1/r$ der zwei Körper, μ die reduzierte Masse und L_z die z-Komponente des (konstanten) Drehimpulses ist. (Für die Newton'sche Gravitationskraft galt $F(r) = -\alpha/r^2$, in der Vorlesung wurde ρ anstelle von r benutzt.)

a) Die obige Gleichung (1) kann dazu dienen, aus der Form der Bahn das Kraftgesetz abzuleiten. Bestimmen Sie nun das Kraftgesetz (Zentralkraft) welches ein Teilchen auf einer logarithmischen Spirale $r = ke^{\beta\varphi}$ hält, mit k und β konstant.

b) Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung $\varphi(t)$ und $r(t)$ der Bahn.

c) Wie groß ist die Gesamtenergie der Bahn, wenn für das Potential $U(r = \infty) = 0$ ist?

4 Punkte

11. Im Gravitationspotential $U_0(\rho) = -GM_\odot m_{pl}/\rho$ der Sonne (Masse $M_\odot$) bewegt sich ein Planet (Masse m_{pl}) auf einer Ellipsenbahn. Kleine Störungen δU des Potentials führen zu einer *Periheldrehung* der Bahn: Nach jedem Umlauf ändert sich die Richtung des Perihels (sonnennächster Punkt) um den Winkel $\delta\varphi$.

a) Zeigen Sie, dass auf dem Weg von Perihel zu Perihel sich der Winkel um

$$\Delta\varphi = -2\sqrt{2\mu}\,\frac{\partial}{\partial l}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho \sqrt{E - U(\rho) - l^2/(2\mu\rho^2)} \tag{2}$$

verschiebt. Hier ist l für L_z benutzt worden! Hinweis: Benutzen Sie

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{dt} \Big/ \frac{d\rho}{dt}$$

und die Beziehungen für $\dot\varphi$ und $d\rho/d\varphi$ aus der Vorlesung.

b) Das Potential sei nun $U = U_0 + \delta U$. Zeigen Sie, dass $\Delta\varphi = 2\pi$ für $\delta U = 0$.

c) Berücksichtigen Sie nur die erste Ordnung in δU, und berechnen Sie die Periheldrehung $\delta\varphi$. Zeigen Sie, dass

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi = 2\mu \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \frac{1}{l} \int_0^\pi \rho^2 \, \delta U(\rho) \, d\varphi \right\} \tag{3}$$

wobei für $\rho = \rho(\varphi)$ die ungestörte Lösung einzusetzen ist. Werten Sie das Ergebnis (3) für die Störpotentiale $\delta U = \beta/\rho^2$ und $\delta U = \gamma/\rho^3$ aus.

4 Punkte

12. Der minimale Abstand eines Kometen von der Sonne sei gleich der Hälfte des Abstandes Erde-Sonne, wobei die Erdbahn als kreisförmig angenommen werde. Seine Geschwindigkeit an diesem Punkt sei gleich der zweifachen Erdbahngeschwindigkeit.

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kometenbahn mit der Erdbahn, die Geschwindigkeit des Kometen dort und den Winkel, unter dem die Bahnen sich schneiden. Welche Zeit verbringt der Komet innerhalb der Erdbahn; wird er das Sonnensystem verlassen? (Es sei angenommen, dass die Kometen- und Erdbahn in der gleichen Ebene liegen.)

4 Punkte

Abgabetermin: **Donnerstag, 23.05.02, 10:00 Uhr** in der Vorlesung bzw. Fach Günther