17.05.2002

Übungen zur Theoretischen Mechanik

Sommersemester 2002

Blatt 5

Thema: Virialsatz, Gedämpfter Oszillator

Übungsaufgaben:

13. Die potentielle Energie eines konservativen Systems von N paarweise miteinander wechselwirkenden Teilchen in einem äußeren Kraftfeld hat die Form

$$U(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{r}_i)$$

Die Bewegung der Teilchen soll in einem *endlichen* Raumgebiet mit zeitlich *beschränkten* Teilchengeschwindigkeiten erfolgen.

Unter dem Virial wird der Ausdruck

$$< \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i U(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) >$$

verstanden. Dabei ist der zeitliche Mittelwert $\langle f \rangle$ einer beliebigen zeitabhängigen Funktion $f(t)$ durch

$$\langle f \rangle \equiv \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

definiert.

a) Leiten Sie aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen der Teilchen den **Virialsatz**

$$2 < \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 > = < \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i U(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) >$$

ab. Hinweis: Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichungen skalar mit $\mathbf{r}_i$ und summieren Sie über alle N Teilchen.

b) Zeigen Sie, dass sich der Virialsatz bei Abwesenheit von äusseren Kräften und einem Wechselwirkungspotential $U_{ij}(r) = k_{ij}\, r^n$, mit $n \in \mathcal{Z}$, $k_{ij} = const.$ und $r = |\mathbf{r}|$ schreiben lässt als

$$2 < T >= n < U >$$

wobei T und U jeweils die gesamte kinetische und potentielle Energie bezeichnen.

4 Punkte

14. Die Bewegungsgleichung eines ein-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Dämpfung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

wobei $\gamma > 0$ und ω zwei reelle Konstanten sind, welche die Stärke der Dämpfung (γ) und die Oszillatorfrequenz (ω) bezeichnen.

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für beliebige γ und ω

b) Geben Sie die Lösungen für die folgendenden Spezialfälle gesondert an, und skizzieren Sie in allen Fällen den Verlauf der Lösungen.

  i) Schwache Dämpfung: $\gamma^2 < \omega^2$

  ii) Aperiodischer Grenzfall: $\gamma^2 = \omega^2$

  iii) Überdämpftes System: $\gamma^2 > \omega^2$

  In welchem der drei Fälle geht der Oszillator bei einer gegebenen Anfangsauslenkung am schnellsten in den Gleichgewichtszustand (Ruhe) über?

c) Stellen Sie die Energiebilanzgleichung auf.

6 Punkte

Abgabetermin: **Montag, 27.05.02, 10:00 Uhr** Fach Günther