

Beispiel: Relativistische Rakete

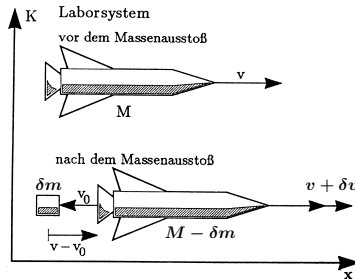
Annahmen:

- Keine äußeren Kräfte
- Antrieb durch Massenausstoß mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$

Erinnerung: Nicht-relativistische Rakete

Laborsystem (Erde): $\mathbf{t} = 0 : \mathbf{v} = 0, M = M_0$

gesucht: $\mathbf{v}(\mathbf{t}), M(\mathbf{t})$



δm Ausgestoßenes Massenelement (positiv)

$\delta M = -\delta m$ Massenänderung der Rakete

$\vec{v}_0 = -v_0 \vec{e}_x$ Ausstoßgeschwindigkeit (rel. zur Rakete)

Impulserhaltung im Raketensystem:

$$(\text{nachher}) \quad (M + \delta M) \delta \vec{v} + \delta m \vec{v}_0 = 0 \quad (\text{vorher})$$

$$\text{nur x-Komponente} \quad (M - \delta m) \delta v - \delta m v_0 = 0$$

$$(\delta v, \delta m \rightarrow 0 ; \delta \rightarrow d) \rightarrow M dv = dm v_0$$

Geschwindigkeitsänderung beobachtet von der Erde:

$$\mathbf{v}_{E,\text{vor}} + d\mathbf{v}_E := \mathbf{v}_{E,\text{nach}} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{E,\text{vor}} + d\mathbf{v}_R \rightarrow d\mathbf{v}_E = d\mathbf{v}_R$$

G.T.

$$dM_E = dM_R = dM = -dm \rightarrow M dv = -v_0 dM$$

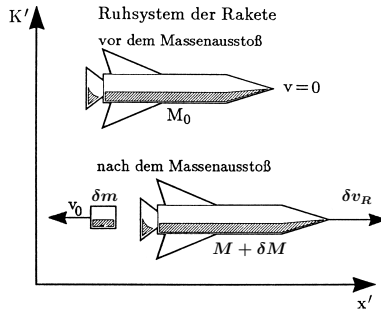
$$\frac{dv}{dM} = -\frac{v_0}{M} \rightarrow v(M) = v_0 \ln \frac{M_0}{M} \quad (6.23)$$

Integrationskonstante so gewählt, dass $\mathbf{v}(M = M_0) = 0$.

$M(\mathbf{t})$ beliebig vorgeben, bestimme dann $\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}(M(\mathbf{t}))$.

$v > v_0$ sobald $\ln \frac{M_0}{M} > 1$; auch $v \rightarrow \infty$ wenn $M \rightarrow 0$.

Relativistische Rakete



Impulssatz im (momentanen) Raketensystem:

$$\mathbf{p} = \mathbf{0} = \gamma_R(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})\delta\mathbf{v}_R + \gamma_0\delta\mathbf{m}(-\mathbf{v}_0) \quad (*)$$

$\delta\mathbf{M}$ Änderung der Ruhemasse[energie] der Rakete

$\delta\mathbf{m}$ Ruhmasse des ausgestoßenen Masselements $\delta\mathbf{M} \neq -\delta\mathbf{m}$

Beziehung zwischen $\delta\mathbf{m}$ und $\delta\mathbf{M}$ durch Energiesatz (6.19)

Im Raketensystem: vorher nachher

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_R = \mathbf{0}) \quad E = Mc^2 &= \gamma_R(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})c^2 + \gamma_0\delta\mathbf{m}c^2 \\ &= \frac{(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta\mathbf{v}_R}{c}\right)^2}} + \frac{(\delta\mathbf{m})c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \delta\mathbf{v}_R, \delta\mathbf{M}, \delta\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{0} \\ \text{Nur } \mathcal{O}(\delta\mathbf{v}_R, \delta\mathbf{M}, \delta\mathbf{m}) \end{array} \right] \approx Mc^2 + \delta\mathbf{M}c^2 + \gamma_0\delta\mathbf{m}c^2$$

Also: $-\delta\mathbf{M} = \gamma_0\delta\mathbf{m} > \delta\mathbf{m}$

Einsetzen in die Impulserhaltung (*)

($\gamma_R \approx 1$, $\delta\mathbf{m}\delta\mathbf{v}_R \ll \delta\mathbf{m}\mathbf{v}_0$; $\delta \rightarrow \mathbf{d}$):

$$\mathbf{M}d\mathbf{v}_R = -d\mathbf{M} \mathbf{v}_0 \quad (**)$$

$$\begin{aligned}
v_{E,\text{vor}} + dv_E &:= v_{E,\text{nach}} = \frac{v_{E,\text{vor}} + dv_R}{1 + \frac{v_{E,\text{vor}} dv_R}{c^2}} \\
[\mathcal{O}(dv_R)] &\approx (v_{E,\text{vor}} + dv_R) \left(1 - v_{E,\text{vor}} \frac{dv_R}{c^2} \right) \\
&\approx v_{E,\text{vor}} + dv_R - v_{E,\text{vor}}^2 \frac{dv_R}{c^2} \\
&= v_{E,\text{vor}} + dv_R \left(1 - \frac{v_{E,\text{vor}}^2}{c^2} \right) = v_{E,\text{vor}} + \frac{1}{\gamma_E^2} dv_R
\end{aligned}$$

Also: $dv_E = \frac{1}{\gamma_E^2} dv_R < dv_R$

$dv_R = \gamma_E^2 dv_E$ in (**) einsetzen, dann haben wir (E weglassen)

$$M \gamma^2 dv = -dM v_0 \rightarrow \gamma^2(v) dv \left[= \frac{dv}{1 - \beta^2} \right] = -v_0 \frac{dM}{M}$$

Auf beiden Seiten integrieren

$$\frac{c}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = v_0 \ln \frac{M_0}{M}$$

Für $\beta \rightarrow 0$ erhält man wegen

$\ln(1 + \beta)/(1 - \beta) \rightarrow \ln(1 + \beta)^2 \rightarrow \ln(1 + 2\beta) \rightarrow 2\beta$
wieder das nicht-relativistische Ergebnis.

Nach β auflösen:

$$\beta = \frac{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2\beta_0}}{1 + \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2\beta_0}} < 1 \quad (6.24)$$

Auch hier wieder: $v(M = M_0) = 0$.

Hier gilt immer: $v \rightarrow c$ für $M \rightarrow 0$, unabhängig von v_0 ;
nicht-relativistischen ist dagegen $v \rightarrow \infty$ wenn $M \rightarrow 0$.

$v > v_0$ bleibt möglich:

Wähle zu gegebenem $\beta_0 < 1$ einen passenden Wert $1 > \beta > \beta_0$
und bestimme dazu den erforderlichen Wert von M .

Einfluss der Ausstoßgeschwindigkeit:

Bei festem $\mathbf{M}/\mathbf{M}_0$: $\mathbf{v}_0 \ll \mathbf{c} \rightarrow (\mathbf{M}/\mathbf{M}_0)^{2\beta_0} \approx 1 \rightarrow \mathbf{v} \ll \mathbf{c}$

Allgemeiner:

$$\beta_1 > \beta_0 \rightarrow \left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{M}_0}\right)^{2\beta_1} < \left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{M}_0}\right)^{2\beta_0} \quad \text{da} \quad \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{M}_0} < 1$$

$$\rightarrow \beta(\beta_1) = \frac{\mathbf{Z}(\beta_1) > \mathbf{Z}(\beta_0)}{\mathbf{N}(\beta_1) < \mathbf{N}(\beta_0)} > \beta(\beta_0)$$

Günstigster Fall: $\mathbf{v}_0 \lesssim \mathbf{c}$ bzw. $\mathbf{v}_0 = \mathbf{c}$ („Photonen“-rakete)

Chemische Rakete: $\mathbf{v}_0 \sim 4 - 5 \text{ km/s}$,

Startgewicht 3000t, Nutzlast $\mathbf{M}(\mathbf{t})$ ca. 46t (wie Saturn V)

$$\rightarrow \mathbf{M}/\mathbf{M}_0 = 60 \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \ln 60 \sim 18 \text{ km/s} \lesssim 10^{-4} \mathbf{c}.$$

„Photonen“-rakete:

$$\mathbf{v} \rightarrow 1 - 2 \left(\frac{1}{60}\right)^2 \sim 1 - 0,6 \times 10^{-3} = 0,9994 \mathbf{c}$$

Raumflug mit konstanter Beschleunigung in der Rakete

Im (momentanen) Ruhssystem der Rakete: Konstante

Beschleunigung von 1g entlang der Längsachse (x-Richtung)

Nicht-relativistisch:

$$\mathbf{v}(1\text{Jahr}) \sim 9.81\text{m/s}^2 \cdot 86400\text{s} \cdot 365,2422 \sim 3.096 \cdot 10^8 \text{m/s} > \mathbf{c}$$

Relativistisch

Im Raketensystem: $\mathbf{b}_R^x = \mathbf{g} \quad \mathbf{b}_R^t = 0 = \mathbf{b}_R^y = \mathbf{b}_R^z$

Lorentztransformation ins Erdsystem:

$$\mathbf{b}_E^x = \gamma \mathbf{b}_R^x - \beta \gamma \mathbf{b}_R^t = \gamma \mathbf{g} = \frac{d\mathbf{u}^x}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}^x)$$

Integriere $\frac{d}{dt} \gamma \mathbf{v}^x = \mathbf{g}$ mit $\mathbf{v}(\mathbf{t} = 0) = 0$:

$$\rightarrow \gamma \mathbf{v} = \mathbf{g} \mathbf{t} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\mathbf{g} \mathbf{t}}{\mathbf{c}} =: \beta_t$$

$$\text{Auflösen nach } \beta: \quad \beta = \frac{\beta_t}{\sqrt{1 + \beta_t^2}} < 1 \quad (6.25)$$

Im Erdsystem zurückgelegter Weg durch Integration von (6.25):

$$x = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \beta_t^2} - 1 \right) \quad (6.26)$$

Für kurze Beschleunigungsdauer t , d.h. $gt \ll c$ bzw. $\beta_t \ll 1$, ist

$$x \sim \frac{c^2}{g} \frac{1}{2} \beta_t^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2}{g} \left(\frac{gt}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} gt^2$$

Eigenzeit in der Rakete:

Integriere $d\tau = \gamma dt = \gamma(\beta(t))dt$:

$$\beta_\tau := \frac{g}{c} \tau = \ln \left(\beta_t + \sqrt{1 + \beta_t^2} \right) = \operatorname{arsinh} \beta_t$$

und nach t aufgelöst

$$\beta_t = \sinh \beta_\tau > \beta_\tau \quad (6.27)$$

Damit wird

$$\beta = \frac{\beta_t}{\sqrt{1 + \beta_t^2}} = \frac{\sinh(\beta_\tau)}{\cosh(\beta_\tau)} = \frac{1 - e^{-2\beta_\tau}}{1 + e^{2\beta_\tau}} \quad (6.28)$$

Zurückgelegter Weg im Erdsystem vs. Eigenzeit in der Rakete:

$$x = \frac{c^2}{g} (\cosh \beta_\tau - 1) \quad (6.29)$$

Erforderlicher Treibstoff bzw. Massenverhältnis M/M_0 :

Kombiniere Rechnung für konstante Beschleunigung mit der für Rückstoß bei $v_0 = \text{konst.}$.

Bestimme aus (6.24) das erforderliche Massenverhältnis M/M_0 für eine gegebene Geschwindigkeit β :

$$\left(\frac{M}{M_0} \right)^{2v_0/c} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = e^{-2\beta_\tau} \rightarrow \frac{M}{M_0} = e^{-(g\tau/v_0)} \quad (6.30)$$

Nicht-relativistisches Ergebnis:

$$v(t) = v(M) = v_0 \ln \frac{M_0}{M} = gt \quad \rightarrow \quad \frac{M}{M_0} = e^{-(gt/v_0)}$$

Technisch günstigste Lösung („Photonen“-rakete mit $v_0 = c$)

$$\frac{M}{M_0} = e^{-(g\tau/c)} = e^{-\beta\tau}$$

Ablauf der Reiseplanung:

Angestrebtes Ziel in Entfernung $x = L$

→ erforderliche Reisezeit τ

→ erforderlicher Treibstoff/Nutzlast $M_T/M_0 = M/M_0 - 1$.

4-Phasen-Raumflug: Erde Beschleunigen Bremsen Ziel
Erde Bremsen Beschleunigen

Die 4 Phasen sind gleichwertig

$$M_4/M_3 = M_3/M_2 = M_2/M_1 = M_1/M_0 = e^{-\beta\tau}.$$

$$\frac{M_4}{M_0} = e^{-4\beta\tau}$$

$$L_2 = 2L$$

Relativistischer Raumflug in 4 Phasen: Beschleunigen, Bremsen, Beschleunigen, Bremsen mit jeweils 1g (Erdbeschleunigung)

Beschleunigungsdauer τ (Jahre)	Flugdauer 4τ (Jahre)	maximale Geschwindigkeit v_{max}/c	erreichte Entfernung im Weltall x_{max} (Lj)	Flugdauer T_E im Erdsystem (Jahre)	Massenverhältnis (2 Phasen) $\mu_2 = \frac{M_2}{M_0}$	Massenverhältnis (4 Phasen) $\mu_4 = \frac{M_4}{M_0}$
1	4	0,77440006	1,126	4,748	0,1271	0,01617
2	8	0,96818436	5,811	15,01	0,01617	0,0002613
5	20	0,99993356	166,3	336,5	$3,322 \cdot 10^{-5}$	$1,104 \cdot 10^{-9}$
10	40	$1 - 2 \cdot 10^{-9}$	29186	58377	$1,104 \cdot 10^{-9}$	$1,218 \cdot 10^{-18}$
25	100	$1 - 8 \cdot 10^{-23}$	$152,4 \cdot 10^9$	$304,85 \cdot 10^9$	$4,047 \cdot 10^{-23}$	$1,638 \cdot 10^{-45}$

τ Beschleunigungsdauer: Eigenzeit in der Rakete

4τ Dauer des Fluges: Eigenzeit in der Rakete

v_{max} Maximal erreichte Geschwindigkeit

x_{max} Maximal erreichte Entfernung

T_E Dauer des Fluges: Zeit auf der Erde

M_0 Masse der Rakete vor Abflug (Nutzlast + Treibstoff)

M_2 Masse der Rakete nach Hinflug

$\mu_2 = M_2/M_0$ Massenverhältnis für Hinflug

M_4 Masse der Rakete nach Rückkehr (Nutzlast)

$\mu_4 = M_4/M_0$ Massenverhältnis für Hin- und Rückflug

Zum Vergleich:

α Centauri: 4.2Lj

Zentrum der Milchstraße: 26000 Lj

Masse der Erde: $5,9736 \times 10^{24}$ kg

$2 \cdot 10^{-9}c = 60cm/s$

$8 \cdot 10^{-23}c = 2,4 \cdot 10^{-14}m/s$ Atomdurchmesser ca. $10^{-10}m$

Protondurchmesser ca. $0,8 \cdot 10^{-15}m$

Spezielle Relativitätstheorie

Lorentz-invariante Formulierung der Elektrodynamik

Elektrodynamik ist bereits Lorentz-invariant.

Ziel: Formulierung in Form von Vierergrößen, die explizit Lorentz-invariant ist.

Erinnerung: Maxwellgleichungen

Innere Feldgleichungen:

Erregungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho\end{aligned}\quad (7.1)$$

Felder ausgedrückt durch Potentiale $\vec{A}, \phi$:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.2)$$

Invariant gegen Eichtransformation

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} & \tilde{\vec{A}} &= \vec{A} + \operatorname{grad} \chi \\ \implies \tilde{\vec{E}} &= \vec{E} & \tilde{\vec{B}} &= \vec{B}\end{aligned}\quad (7.3)$$

→ Freiheit bei der Bestimmung von $\phi, \vec{A}$: Wahl der Eichung

Bsp.: Coulombeichung: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

Hier: Lorenzeichung: $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

Schreibe $\phi, \vec{A}$ in der Form $(\Phi^\mu) = (\phi/c, \vec{A})$ (7.4)

Die Lorenzeichung wird dann zu

$$\partial_\mu \Phi^\mu = 0 \quad (7.5)$$

Der Ausdruck $\partial_\mu \Phi^\mu = \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ ist ein Lorentz-Skalar.

→ Φ^μ ist ein kontravarianter Vierer-Vektor.

Mit der Definition

$$(\mathbf{j}^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \quad (7.6)$$

lässt sich die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial c\rho}{\partial ct} = 0$$

schreiben als

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (7.7)$$

$\partial_\mu j^\mu$ ist ein Lorentz-Skalar

→ j^μ ist ein kontravarianter Vierervektor.

Maxwellgleichungen → Zeitentwicklungsgleichungen für die Potentiale

$$\begin{aligned} \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\mu_0 c^2 \rho \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Oder

$$\square \Phi^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (7.8)$$

mit dem D'Alembert-Operator ('vierdimensionaler Laplace-Operator')

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

Elektromagnetischer Feldstärktensor

$$(\mathbf{F}_{\mu\nu}) := (\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu) \quad (7.9)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial ct} - \frac{\partial(\phi/c)}{\partial x} & -\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial ct} - \frac{\partial(\phi/c)}{\partial y} & -\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial ct} - \frac{\partial(\phi/c)}{\partial z} \\ \text{anti-symmetrisch} & 0 & -\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial y} & -\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial z} \\ & & 0 & -\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial z} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Phi_\mu = \eta_{\mu\nu} \Phi^\nu = (\phi/c, -\vec{\mathbf{A}})$ ist ein kovarianter Vektor

→ $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ ist ein kovarianter Tensor zweiter Stufe.

Raum-Zeit-Komponenten $-\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{E}}$

Raum-Raum-Komponenten $\text{rot } \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$

$$\{\mathbf{F}_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \mathbf{E}_x & \frac{1}{c} \mathbf{E}_y & \frac{1}{c} \mathbf{E}_z \\ -\frac{1}{c} \mathbf{E}_x & 0 & -\mathbf{B}_z & \mathbf{B}_y \\ -\frac{1}{c} \mathbf{E}_y & \mathbf{B}_z & 0 & -\mathbf{B}_x \\ -\frac{1}{c} \mathbf{E}_z & -\mathbf{B}_y & \mathbf{B}_x & 0 \end{pmatrix}$$

Lorentztransformation $\mathbf{F}'_{\mu\nu} = \Lambda^{\kappa}_{\mu} \Lambda^{\lambda}_{\nu} \mathbf{F}_{\kappa\lambda}$

→ Transformation von $\vec{\mathbf{E}}$ und $\vec{\mathbf{B}}$ für einen Boost in x-Richtung:

$$\mathbf{E}'_x = \mathbf{E}_x,$$

$$\mathbf{B}'_x = \mathbf{B}_x$$

$$\mathbf{E}'_y = \gamma (\mathbf{E}_y - c\beta \mathbf{B}_z)$$

$$\mathbf{B}'_y = \gamma \left(\mathbf{B}_y + \frac{\beta}{c} \mathbf{E}_z \right)$$

$$\mathbf{E}'_z = \gamma (\mathbf{E}_z + c\beta \mathbf{B}_y)$$

$$\mathbf{B}'_z = \gamma \left(\mathbf{B}_z - \frac{\beta}{c} \mathbf{E}_y \right)$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind also miteinander verknüpft

Einschränkungen durch Invarianten von F :

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\eta^{\mu\kappa}F_{\kappa\lambda}\eta^{\lambda\nu} = -\frac{2}{c^2} \left(E^2 - c^2 B^2 \right) \quad (7.10)$$

und

$$F_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\kappa\lambda} = -\frac{4}{c}\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (7.11)$$

sind Skalare, d.h. sie sind invariant unter Lorentztransformation.

$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ ist der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor

$$\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} := \begin{cases} +1 & \text{für } \kappa\lambda\mu\nu \text{ gerade Permutation von } 0123 \\ -1 & \text{für } \kappa\lambda\mu\nu \text{ ungerade Permutation von } 0123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.12)$$

Damit folgt:

- ▶ Ist $\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 = 0$, also $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$, dann ist in jedem Bezugssystem $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$.
- ▶ Gilt in einem System $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, d.h. $\vec{E} \perp \vec{B}$, dann stehen $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld auch in jedem anderen System senkrecht aufeinander.
- ▶ Ist andererseits $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, dann gibt es kein System, in dem $\vec{E} \perp \vec{B}$ oder $\vec{E} = 0$ oder $\vec{B} = 0$ ist.
- ▶ Ist $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, und gilt weiter $\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 > 0$ (< 0), dann läßt sich ein System finden, in dem $\vec{B} = 0$ ($\vec{E} = 0$) ist.
- ▶ Ein Beispiel für ein System mit $\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 = 0$ und $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ ist eine elektromagnetische Welle.

Maxwellgleichungen im Vakuum

Betrachte den Vierervektor $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \eta^{\mu\kappa} \eta^{\lambda\nu} F_{\kappa\lambda}$

Zeit-Komponente ($\mu = 0$)

$$- (1/c) \operatorname{div} \vec{E}$$

Raum-Komponenten ($\mu = 1, 2, 3$):

$$- \operatorname{rot} \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Erregungsgleichungen

(7.1) mit $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ und $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \left(\operatorname{rot} \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \left(\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

$$(1/c) \operatorname{div} \vec{E} = \mu_0 c \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \mu_0 c \operatorname{div} \vec{D} = \mu_0 c \varrho$$

In Viererschreibweise, mit der Vierer-Stromdichte $\{j^\mu\}$ aus (7.6)

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 \{c\varrho, \vec{j}\} = -\mu_0 j^\mu \quad (7.13)$$

Direkt aus der Potentialgleichung (7.8), mit Lorenzbeziehung:

$$\begin{aligned} \square \Phi^\mu &= \mu_0 j^\mu \\ &= \eta^{\nu\kappa} \partial_\nu \partial_\kappa \Phi^\mu - \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda \partial_\nu \Phi^\nu \\ &= \eta^{\nu\kappa} \eta^{\mu\lambda} \partial_\nu \partial_\kappa \Phi_\lambda - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} \partial_\lambda \partial_\nu \Phi_\kappa \\ &= \eta^{\nu\kappa} \eta^{\mu\lambda} \partial_\nu (\partial_\kappa \Phi_\lambda - \partial_\lambda \Phi_\kappa) \\ &= \eta^{\nu\kappa} \eta^{\mu\lambda} \partial_\nu F_{\kappa\lambda} \\ &= \partial_\nu F^{\nu\mu} \\ &= -\partial_\nu F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Innere Feldgleichungen in Viererschreibweise:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (7.14)$$

Die Indizes λ, μ, ν erlauben zunächst $4^3 = 64$ verschiedene Kombinationen.

- Gleichung ist trivial erfüllt (Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$), wenn zwei Indizes gleich sind
- Vertauschungen von Indizes verändert nur die Reihenfolge der Summanden (Zyklizität der Indizes in der Gleichung)

Nur vier verschiedene Gleichungen, bspw. aus den Kombinationen

$$(\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3), (0, 2, 3), (0, 1, 3), (0, 1, 2)$$

$$(\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3) \text{ liefert}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Die anderen drei Gleichungen ergeben

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Alternative: Kompakte Schreibweise mit Hilfe des total antisymmetrischen Levi-Civita-Tensors:

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (7.15)$$

Liefert die gleichen (nicht-trivialen) Beziehungen wie (7.14).

Zusammenfassung: Im Vakuum ($\epsilon = 1$ und $\mu = 1$)

$\partial_\mu \Phi^\mu = 0$	Lorenz – Eichung
$\partial_\mu j^\mu = 0$	Kontinuitätsgleichung
$\square \Phi^\mu = \mu_0 j^\mu$	Potentialgleichung
$\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu = F_{\mu\nu}$	Feldstärkentensor
$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu$	Erregungsgleichungen
$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$	Innere Feldgleichungen
oder $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$	